Fundamentos de Finanzas

Capítulo 6: Optimización de Portafolios

Alexis Solis Cancino
alexis.solisc@gmail.com

Abstract

En este capítulo, nos enfocaremos en el Modelo de Harry Markowitz (economista norteamericano) publicado en 1952; el cual inició la llamada "Teoría Moderna de Portafolios de Inversión". Posteriormente, se verá el modelo denominado CAPM (1962) para valuación de activos, el cual tuvo como base precisamente el modelo de Markowitz.

6.1. Introducción – ¿Cómo describir el rendimiento de una acción?

Dfn. La *tasa de rendimiento* es el incremento porcentual en la riqueza del inversionista asociada con mantener un activo financiero en ese período. Por ejemplo, para una acción, el rendimiento es igual a los dividendos en efectivo más el cambio en el valor de la acción en el período. Para un período de tiempo, suponiendo que se pagó un dividendo, la tasa de rendimiento está dada por:

$$r = \frac{D_1 + S_1 - S_0}{S_0} \tag{6.1}$$

Los rendimientos son **variables estocásticas** (i.e. aleatorias) y por lo tanto su predicción representa un reto tanto financiero como matemático. Al no poder predecir los rendimientos, nos interesa conocer por lo menos aspectos de dicha aleatoriedad. Para este fin, la Estadística y la Probabilidad auxilian a las Finanzas para obtener ”guías” sobre este respecto. En el Modelo de Markowitz, se utilizan principalmente dos medidas estadísticas para describir el rendimiento de una acción:

1) El rendimiento esperado (o rendimiento promedio): $E[r]$.
2) La varianza de los rendimientos: $\sigma^2[r]$.

Dfn. La *esperanza*, $E[r]$, también conocida como media, es el **promedio ponderado** de los valores que toman los rendimientos, ponderados por la **probabilidad** de que éstos ocurran. La esperanza además, nos dice la localización central (o tendencia) del rendimiento de la acción. Cuando tenemos conocimiento certero de las probabilidades con las que ocurren ”m” diferentes rendimientos, el rendimiento esperado (o esperanza de los rendimientos) puede calcularse como:

$$E[r] = \sum_{k=1}^{m} r_k \cdot p_k = r_1 \cdot p_1 + r_2 \cdot p_2 + \cdots + r_m \cdot p_m \tag{6.2}$$

Donde,
p_k: es la probabilidad de que ocurra el rendimiento r_k.

Dado que las probabilidades certeras son difíciles de calcular (de hecho, sólo pueden obtenerse estimaciones de ellas), el valor esperado debe ser estimado. En este caso, si tenemos una muestra (colección de datos) de “m” rendimientos pasados se puede estimar como:

$$\bar{r} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} r_k = \frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_m}{m} \tag{6.3}$$

i.e. el promedio de los “m” rendimientos de la muestra. En este caso, r_k : denota el “k-ésimo” rendimiento de la muestra.

Conocer la tendencia central de los rendimientos es muy útil pero no suficiente. Para tener una mejor descripción de cómo se comportan los rendimientos, podemos utilizar además lo que se denomina como "medidas de dispersión". Las principales medidas de dispersión que se utilizarán son la *varianza* y la *desviación estándar*.

Dfn. La *varianza* de los rendimientos, $\sigma^2[r]$ nos dice el **promedio** de la **distancia cuadrática** del rendimiento con respecto a su media ó valor esperado, $E[r]$. Matemáticamente, está definida como:

$$\sigma^2[r] = E\left[\left(r_k - E[r]\right)^2\right] \tag{6.4}$$

Si observamos bien la fórmula anterior, podemos ver que la varianza es a su vez un valor esperado (recordemos que esto no es otra cosa mas que un promedio). Por lo tanto, se puede pensar como el promedio de una distancia cuadrática ponderado por la probabilidad de que dicha distancia ocurra. De esta forma, cuando tenemos conocimiento de las probabilidades con las que ocurren "m" diferentes rendimientos, la varianza puede calcularse como:

$$\sigma^2[r] = \sum_{k=1}^{m} \left(r_k - E[r]\right)^2 \cdot p_k = \left(r_1 - E[r]\right)^2 \cdot p_1 + \cdots + \left(r_m - E[r]\right)^2 \cdot p_m \tag{6.5}$$

Donde,
p_k es la probabilidad de que la distancia $\left(r_k - E[r]\right)$ ocurra.

Al igual que la esperanza de los rendimientos, este promedio sólo puede estimarse (pues no se tienen las probabilidades (p_k) de la realización de cada rendimiento). Si tenemos una muestra (colección de datos) de "m" rendimientos pasados, la varianza se puede estimar como:

$$\hat{\sigma}^2[r] = \frac{1}{(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \left[(r_k - E[r])^2\right] = \frac{\left(r_1 - E[r]\right)^2 + \cdots + \left(r_k - E[r]\right)^2}{(m-1)} \tag{6.6}$$

Donde el símbolo "gorro" arriba de σ^2 indica que se está estimando.

Al ser una distancia cuadrática, la varianza está en unidades cuadradas. Para deshacernos de este inconveniente se define la *desviación estándar* de los rendimientos, $\sigma[r]$, como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma[r] = \sqrt{\sigma^2[r]} \tag{6.7}$$

Esta medida es vital pues en el Modelo de Markowitz la desviación estándar representa **el riesgo** del activo financiero que se estudia.

6.2. *Extensión a múltiples activos financieros*

Ya vimos en la ecuación (6.7) que el riesgo de un activo financiero es la desviación estándar; la cuál viene directamente de su varianza. Sin embargo, para describir el riesgo de tener dos o más activos financieros, debemos de utilizar medidas de **variación conjunta**. Para este fin, se utilizan principalmente dos medidas estadísticas:

1) La **covarianza** de los rendimientos: $\sigma[r_i, r_j]$.
2) La **correlación** de los rendimientos: $\rho[r_i, r_j]$.

Dfn. La *covarianza* de los rendimientos de la pareja de activos i y j , $\sigma[r_i, r_j]$, nos dice la **variación conjunta** que hay entre estos rendimientos. La covarianza nos ayuda a identificar asociación lineal entre dos variables aleatorias (como lo son los rendimientos). Está definida matemáticamente como:

$$\sigma[r_i, r_j] = E\Big[\big(r_i - E[r_i]\big)\,\big(r_j - E[r_j]\big)\Big] \tag{6.8}$$

Al igual que la varianza, la covarianza es un valor esperado. En este caso, es el valor esperado del producto de dos distancias. Dado que se trata de un valor esperado, se puede calcular como un promedio ponderado por probabilidades (p_k). Si conocemos las probabilidades con las que ocurren "m" diferentes distancias, la covarianza puede calcularse como:

$$\sigma_{ij} = \sigma[r_i, r_j] = \sum_{k=1}^{m} \big(r_{i,k} - E[r_i]\big)\,\big(r_{j,k} - E[r_j]\big) \cdot p_k \tag{6.9}$$

Donde,
$r_{i,k}$: es el "k-ésimo" rendimiento del activo i.
$E[r_i]$: es el rendimiento esperado del activo i.
$r_{j,k}$: es el "k-ésimo" rendimiento del activo j.
$E[r_j]$: es el rendimiento esperado del activo j.
p_k : es la probabilidad de que ocurra el "k-ésimo" rendimiento.

Nuevamente, este promedio sólo puede estimarse (pues no se tienen las probabilidades (p_k) de la realización de cada rendimiento). Si tenemos una muestra (colección de datos) de "m" rendimientos pasados, la covarianza se puede estimar como:

$$\hat{\sigma}[r_i, r_j] = \frac{1}{(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \Big[\big(r_{i,k} - E[r_i]\big)\,\big(r_{j,k} - E[r_j]\big)\Big] \tag{6.10}$$

Donde el símbolo "gorro" arriba de σ indica que se está estimando.

Puesto que la covarianza es el producto de dos distancias, ésta se encuentra en unidades cuadradas. Por esto, sólo se interpreta su signo (positivo, negativo, o cero) sin importar su valor. Estos tres casos se pueden interpretar como sigue:

$$\sigma[r_i, r_j] > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal positiva entre los activos } i \text{ y } j.$$

$$\sigma[r_i, r_j] < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal negativa entre los activos } i \text{ y } j.$$

$$\sigma[r_i, r_j] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{No hay asociación lineal entre los activos } i \text{ y } j.$$

La covarianza entonces, nos dice en qué dirección van las asociaciones, pero no nos dice qué tan fuertes o débiles son dichas asociaciones. Con la finalidad de atender este problema, se define el *Coeficiente de Correlación Lineal*.

Dfn. El *Coeficiente de Correlación Lineal* de los rendimientos de la pareja de activos i y j , $\rho[r_i, r_j]$, nos dice si la relación de la **variación conjunta** que hay entre estos rendimientos es fuerte o débil. Está definido por:

$$\rho_{ij} = \rho[r_i, r_j] = \frac{\sigma[r_i, r_j]}{\sigma[r_i] \cdot \sigma[r_j]} \tag{6.11}$$

Si nos fijamos en las unidades que tiene dicho coeficiente, podemos observar que no tiene; es decir, es **adimensional**. Además, una propiedad notable del Coeficiente de Correlación Lineal es que:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1 \tag{6.12}$$

Para dicho coeficiente, se pueden definir cuatro casos generales:

$$\rho[r_i, r_j] \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal positiva fuerte.}$$

$$\rho[r_i, r_j] \to -1 \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal negativa fuerte.}$$

$$\rho[r_i, r_j] \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal débil positiva}$$

$$\rho[r_i, r_j] \to 0^- \quad \Longrightarrow \quad \text{Asociación lineal débil negativa}$$

Por último, para medir la **dependencia de la variabilidad** que hay entre una pareja de rendimientos utilizamos el *Coeficiente de Determinación*: ρ_{ij}^2. Éste nos dice la **fracción de variabilidad** de los rendimientos del activo i que **puede ser asociada** con la variabilidad de los rendimientos **del otro activo** (j). El Coeficiente de Determinación está definido por:

$$\rho_{ij}^2 = \frac{\Big(\sigma[r_i, r_j]\Big)^2}{\sigma^2[r_i] \cdot \sigma^2[r_j]} \tag{6.13}$$

6.3. Rendimiento Esperado y Riesgo de un Portafolio

Dfn. Un *portafolio de inversión* o "cartera de inversión" es un conjunto de activos financieros ya sea de renta fija, de renta variable, derivados, o cualquier otro activo, en el que un inversionista coloca dinero con el fin de obtener rendimientos.

El portafolio tiene como finalidad **repartir o disminuir el riesgo** total al combinar distintos activos. A esto se le conoce como *Diversificación del Portafolio de Inversión*.

Un portafolio de inversión puede verse como un único activo financiero, y por lo tanto, podemos describir sus rendimientos de acuerdo a su rendimiento esperado y su desviación estándar (riesgo) como lo hicimos con activos individuales.

Dfn. El *peso de un activo* en el portafolio (w_k), se define como el porcentaje del monto total de la inversión que se destina a dicho activo. Se calcula como el monto de dinero invertido en el activo entre el monto de dinero total invertido en el portafolio. Así entonces, si se invierte en N activos diferentes, el peso del "k-ésimo" activo está dado por:

$$w_k = \frac{m_k}{M} \tag{6.14}$$

Donde,

m_k : es el monto de dinero invertido en el "k-esimo" activo.

M: es el monto de dinero total invertido en el portafolio.

Dado que el monto total de dinero invertido en el portafolio es la suma de los montos invertidos en cada activo individual, tenemos que:

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k \tag{6.15}$$

Y por lo tanto, la suma de los N pesos del portafolio siempre debe de dar el 100%. Esto es:

$$\sum_{k=1}^{N} w_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{M} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k = \frac{1}{M} \cdot M = 1 \tag{6.16}$$

Si el portafolio está conformado de N activos diferentes, el rendimiento esperado del portafolio es el promedio de los rendimientos esperados individuales ponderado por sus respectivos pesos. Es decir:

$$E[r_p] = \sum_{k=1}^{N} w_k \cdot E[r_k] \tag{6.17}$$

Para estimar este rendimiento esperado, basta con poner las estimaciones del rendimiento esperado de cada activo individual (es decir, sustituir los valores esperados del lado derecho por los rendimientos promedio):

$$\bar{r}_p = \sum_{k=1}^{N} w_k \cdot \bar{r}_k = w_1 \cdot \bar{r}_1 + w_2 \cdot \bar{r}_2 + \cdots + w_N \cdot \bar{r}_N \tag{6.18}$$

Cuando N es muy grande, es cómodo trabajar de manera matricial. Para tal propósito, definamos el vector columna de pesos como:

$$\overrightarrow{w} = \underset{(N \times 1)}{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}}$$

, el cual tiene dimensiones $(N \times 1)$.

Posteriormenete, definamos el vector columna de rendimientos promedio:

$$\overrightarrow{\mu} = \underset{(N \times 1)}{\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix}}$$

, el cual también tiene dimensiones $(N \times 1)$.

La ecuación (6.18) entonces se logra mediante el producto interior de estos dos vectores. Es decir:

$$\bar{r}_p = (\overrightarrow{w})^T \, (\overrightarrow{\mu}) = \underset{(1 \times N)}{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{bmatrix}} \underset{(N \times 1)}{\begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{bmatrix}} = \sum_{k=1}^{N} w_k \cdot \bar{r}_k \tag{6.19}$$

Sería natural pensar que el riesgo del portafolio también es el promedio ponderado de cada uno de los riesgos individuales. Sin embargo, ya vimos en la Sección 6.2 que puede existir una relación lineal entre los rendimientos de **parejas** de activos (i.e. covarianzas). Esto causará que el riesgo de un portafolio sea mayor al promedio de los riesgos individuales (a menos que se encuentren N activos cuya covarianza sea igual a cero; i.e. *activos no correlacionados*).

La varianza de un portafolio (en el Modelo de Markowitz) está definida por:

$$\sigma^2[r_p] = E\Big[\big(r_p - E[r_p]\big)^2\Big] = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(w_k)(w_j)(\sigma_{kj}) = \sum_{k=1}^{N} w_k^2\sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\k\neq j}}^{N}(w_k)(w_j)(\sigma_{kj}) \tag{6.20}$$

Nuevamente, para estimar la varianza del portafolio, basta con sustituir las varianzas estimadas de cada activo y las covarianzas estimadas de cada pareja de activos:

$$\hat{\sigma}^2[r_p] = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(w_k)(w_j)(\hat{\sigma}_{kj}) = \sum_{k=1}^{N} w_k^2\hat{\sigma}_k^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\k\neq j}}^{N}(w_k)(w_j)(\hat{\sigma}_{kj}) \tag{6.21}$$

Por ejemplo, para un portafolio de dos activos A y B entonces, la varianza estimada está dada por:

$$\hat{\sigma}^2[r_p] = w_A^2\hat{\sigma}_A^2 + w_B^2\hat{\sigma}_B^2 + (w_A)(w_B)(\hat{\sigma}_{AB}) \tag{6.22}$$

Para $N > 2$ es incómodo trabajar con las sumas; así que definimos la *matriz de varianzas y covarianzas* **estimada** para poder hacer esta operación de manera matricial. La matriz de varianzas y covarianzas estimada es una **matriz cuadrada** de dimensiones $(N \times N)$ cuando se tienen N activos en el portafolio. Está definida por:

$$\hat{\Sigma} = \underset{(N\times N)}{\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{1,2} & \hat{\sigma}_{1,3} & \cdots & \hat{\sigma}_{1,N} \\ \hat{\sigma}_{2,1} & \hat{\sigma}_2^2 & \hat{\sigma}_{2,3} & \cdots & \hat{\sigma}_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{N,1} & \hat{\sigma}_{N,2} & \hat{\sigma}_{N,3} & \cdots & \hat{\sigma}_N^2 \end{bmatrix}} \tag{6.23}$$

La cual tiene las varianzas sobre la diagonal y las covarianzas fuera de la diagonal. Además, la matriz es simétrica puesto que:

$$\hat{\sigma}[r_j, r_k] = \hat{\sigma}[r_k, r_j] \quad \Longrightarrow \quad \hat{\sigma}_{j,k} = \hat{\sigma}_{k,j} \tag{6.24}$$

(i.e. la covarianza del activo j con k es igual a la covarianza del activo k con j).

Notemos que hay N^2 elementos dentro de la matriz, pero N son varianzas. Por esto, pensaríamos que tenemos que calcular $N^2 - N$ diferentes covarianzas.

Sin embargo, por la simetría de la matriz demostrada en la ecuación (6.24), sólo la mitad de las covarianzas son diferentes y por tanto, tenemos que calcular:

$$\frac{N^2 - N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

diferentes covarianzas para cuando se invierte en N activos. Una de las principales desventajas del modelo de Markowitz es que si N llega a ser muy grande, el número de covarianzas a calcular puede ser abrumador (de hecho esto motivó a otros economistas a crear modelos distintos al de Markowitz).

De vuelta al tema principal, la varianza del portafolio puede calcularse de manera matricial como:

$$\hat{\sigma}^2[r_p] = (\vec{w})^T \cdot \hat{\Sigma} \cdot (\vec{w}) = \underset{(1\times N)}{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{bmatrix}} \underset{(N\times N)}{\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{1,2} & \hat{\sigma}_{1,3} & \cdots & \hat{\sigma}_{1,N} \\ \hat{\sigma}_{2,1} & \hat{\sigma}_2^2 & \hat{\sigma}_{2,3} & \cdots & \hat{\sigma}_{2,N} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \hat{\sigma}_{N,1} & \hat{\sigma}_{N,2} & \hat{\sigma}_{N,3} & \cdots & \hat{\sigma}_N^2 \end{bmatrix}} \underset{(N\times 1)}{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}} \tag{6.25}$$

Por último, el riesgo del portafolio, al igual que cualquier otro activo, es la desviación estándar del portafolio; que también en este caso se calcula como la raíz de la varianza. Para el portafolio esto es:

$$\hat{\sigma}[r_p] = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} w_k^2 \hat{\sigma}_k^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ k\neq j}}^{N} (w_k)(w_j)(\hat{\sigma}_{kj})} \tag{6.26}$$